

This question paper contains 16+3 printed pages]

Roll No.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|

S. No. of Question Paper : 2436

Unique Paper Code : 12271102

Name of the Paper : **Mathematical Methods for Economics-I**

Name of the Course : **B.A. (Hons.) Economics—CBCS (OC)**

Semester : **I**

Duration : **3 Hours**

Maximum Marks : **75**

(Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.)

Note :— Answers may be written either in English or in Hindi; but the same medium should be used throughout the paper.

टिप्पणी :— इस प्रश्न-पत्र का उत्तर अंग्रेजी या हिन्दी किसी एक भाषा में दीजिए; लेकिन सभी उत्तरों का माध्यम एक ही होना चाहिए।

There are six questions in all.

All questions are compulsory.

A simple calculator can be used.

कुल छः प्रश्न हैं।

सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

साधारण कैल्कुलेटर का उपयोग किया जा सकता है।

P.T.O.

1. Do any two of the following :

2×4=8

(a) Solve the following inequalities :

(i) $\left| \frac{3x-4}{2} \right| \leq \frac{5}{12}$

(ii) $\ln(\ln(e^x - 1)) < 0$.

(b) (i) The curve $y = x^2 + 4x$ is symmetric about the line $x = k$. Find k .

(ii) Find the domain for $f(x) = \frac{1}{\log(1-x)} + \sqrt{x+2}$

(c) Show graphically the regions in the (x, y) plane represented by the following sets :

$$A = \{(x, y) : y \geq \frac{|x-1|}{x}, x > 0\}$$

$$B = \{(x, y) : y \leq 21 - 18x - 3x^2\}$$

$$C = A \cap B.$$

निम्नलिखित में से किन्हीं दो के उत्तर दीजिए :

(a) निम्नलिखित असमिकाओं (Inequalities) को हल कीजिए :

(i) $\left| \frac{3x-4}{2} \right| \leq \frac{5}{12}$

(ii) $\ln(\ln(e^x - 1)) < 0$.

(b) (i) वक्र $y = x^2 + 4x$, रेखा $x = k$ के आसपास सममित है। k को ज्ञात कीजिए।

(ii) x के वे मान ज्ञात कीजिए जिनके लिए :

$$f(x) = \frac{1}{\log(1-x)} + \sqrt{x+2}$$

(c) निम्नलिखित समुच्चयों द्वारा व्यक्त क्षेत्रों को आरेख की सहायता से दर्शाइए :

$$A = \{(x, y) : y \geq \frac{|x-1|}{x}, x > 0\}$$

$$B = \{(x, y) : y \leq 21 - 18x - 3x^2\}$$

$$C = A \cap B$$

2. Do any four of the following :

4×4=16

(a) Show that the inverse of the following function exists :

$$y = ab^x \quad (a > 0, b > 1).$$

Find the inverse function $g(x)$. Find $g'(a)$ without finding the derivative of $g(x)$.

(b) Find the limits :

(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2+3x^m}{1-x^n} \right)^m, m, n > 0$

(ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}}$.

- (c) (i) Find an equation of the line tangent to the graph of $(x^2 + y^2)^3 = 8x^2y^2$ at the point $(-1, 1)$.

(ii) Given :

$$V = \pi r^2 h.$$

How is the proportional rate of increase in V related to the proportional rates of increase in r and h ?

Assume h and r are functions of time.

- (d) Determine whether the following converges or diverges.

If it converges, find the limit :

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$

(ii) $(-1)^{n+1} \left\{ \frac{n}{2n+1} \right\}_{n=1}^{\infty}$

- (e) (i) Point P moves so that the difference of its distances from $(3, 3)$ and $(-3, -3)$ is always 6. Find the equation that the coordinates (x, y) of P must satisfy. What curve does it represent ?

- (ii) Draw the graph of $y = e^{x-1} - 4$, using the graph of $y = e^x$.

निम्नलिखित में से किन्हीं चार के उत्तर दीजिए :

- (a) दर्शाइए कि निम्नलिखित फलन के प्रतिलोम फलन (Inverse function) का अस्तित्व है :

$$y = ab^x \quad (a > 0, b > 1)$$

प्रतिलोम फलन $g(x)$ को ज्ञात कीजिए। $g(x)$ का अवकलज (derivative) ज्ञात किए बिना $g'(a)$ को ज्ञात कीजिए।

- (b) सीमाओं को ज्ञात कीजिए :

(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2 + 3x^m}{1 - x^n} \right)^{m, n > 0}$

(ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}}$

- (c) (i) $(x^2 + y^2)^3 = 8x^2y^2$ के आरेख की बिन्दु $(-1, 1)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

- (ii) दिया हुआ है :

$$V = \pi r^2 h$$

V की आनुपातिक वृद्धि दर (Proportional rates of increase), r व h की आनुपातिक वृद्धि दरों से किस प्रकार सम्बन्धित है ? मान लीजिए कि h व r समय के फलन हैं।

(d) ज्ञात कीजिए कि निम्नलिखित अनुक्रम (Sequence)

अभिसारी (Convergent) है या अपसारी (Divergent)।

यदि यह अभिसारी है, तो इनकी सीमाएँ (Limits) भी ज्ञात

कीजिए :

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$

(ii) $(-1)^{n+1} \left\{ \frac{n}{2n-1} \right\}_{n=1}^{\infty}$

(e) (i) बिन्दु P इस प्रकार गति करता है कि (3, 3) व

(-3, -3) से इसकी दूरियों का अन्तर हमेशा 6 होता

है। P के निर्देशांकों (Coordinates) (x, y) द्वारा सन्तुष्ट

किए जाने वाला समीकरण ज्ञात कीजिए। यह किस

वक्र को निरूपित करता है ?

(ii) $y = e^x$ के आरेख की सहायता से $y = e^{x-1} - 4$ का

आरेख बनाइए।

3. Do any three of the following :

(a) Find the elasticity of y w.r.t. x :

(i) $y = x^a e^{-b(x+c)}$

(ii) $y = x + \sqrt{xy}$

(b) (i) Verify the quadratic approximation :

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2 \text{ for } x = 0$$

Determine its accuracy for $|x| \leq 0.1$.

(ii) Show that the equation $x^3 + 3x + 1 = 0$ has exactly one real root.

(c) (i) Let f be defined by

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1, & x < 0 \\ 5x^2 - 3, & x > 2 \end{cases}$$

Define $f(x)$ as a linear function on $[0, 2]$ so that f

is continuous for all values of x .

(ii) Solve for x : $4^x - 4^{x-1} = 3^{x+1} - 3^x$.

- (d) (i) Check for differentiability at $x = 0$ for the function

$$f(x) = \sqrt[3]{x}.$$

- (ii) Examine the continuity for :

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + x^n}, x > 0$$

Plot the graph.

निम्नलिखित में से किन्हीं तीन के उत्तर दीजिए :

- (a) y की x के सापेक्ष लोच (Elasticity) ज्ञात कीजिए :

(i) $y = x^a e^{-b(x+c)}$

(ii) $y = x + \sqrt{xy}$

- (b) (i) निम्नलिखित द्विघात सन्निकटन (Quadratic approximation) को सत्यापित (Verify) कीजिए :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 \quad x = 0 \text{ हेतु}$$

$|x| \leq 0.1$ हेतु इसकी यथार्थता (accuracy) भी ज्ञात कीजिए।

- (ii) दर्शाइए कि समीकरण $x^3 + 3x + 1 = 0$ का एक मूल (root) है।

- (c) (i) मान लीजिए कि f

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1, & x < 0 \\ 5x^2 - 3, & x > 2 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित है। $f(x)$ को $[0, 2]$ पर एक ऐसे रेखीय

(Linear) फलन के रूप में परिभाषित कीजिए कि f

x के सभी मानों हेतु संतत (Continuous) हो।

- (ii) x हेतु हल कीजिए :

$$4^x - 4^{x-1} = 3^{x+1} - 3^x$$

- (d) (i) फलन $f(x) = \sqrt[3]{x}$ की $x = 0$ पर अवकलनीयता

(Differentiability) हेतु जाँच कीजिए।

- (ii) $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + x^n}, x > 0$ का सांतत्य (Continuity)

हेतु परीक्षण कीजिए। आरेख बनाइए।

4. Do any *three* of the following :

3×5=15

- (a) (i) The estimated value of a diamond bought for investment purposes is :

$$V = 250000(1.75)^{4\sqrt{t}}$$

If the rate of interest under continuous compounding is 7%, how long should the diamond be held ?

- (ii) Consider two cashflows. For cashflow A, you receive Rs. 10 every year for 5 years with the first payment being today. For cashflow B, you receive Rs. x every year forever with the first payment being today. What is the value of x in order for cashflow B to have the same present value as

- (b) Given a logistic function describing the population growth over time, t :

$$f(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-rt}}$$

- (i) What is the initial population ? At what rate is $P(t)$ increasing at time $t = 0$?
- (ii) What happens to the population over time ?
- (iii) Find the point of time when the rate of growth of population starts declining.
- (c) (i) Find all points (x, y) on the graph of $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 8$ where lines tangent to the graph at (x, y) have slope = -1 .
- (ii) The function $f(x)$ is everywhere continuous and differentiable. Prove that if the function $f(x)$ has two real roots, then its derivative $f'(x)$ has at least one root.

(d) Find the inverse $g(x)$ of the following function :

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$$

Also find the domain of the inverse. Show graphically that

$f(x)$ and $g(x)$ are symmetric about the line $y = x$.

निम्नलिखित में से किन्हीं तीन के उत्तर दीजिए :

- (a) (i) निवेश के उद्देश्य से खरीदे गए एक हीरे का आकलित (Estimated) मूल्य $V = 200000(1.75)^{4t}$ है। यदि सतत चक्रवृद्धि (Continuously compounded) ब्याज दर 7% है, तो इस हीरे को कब तक रखा जाना चाहिए ?
- (ii) दो नकदी प्रवाहों पर विचार कीजिए। नकदी प्रवाह A हेतु आपको 5 वर्ष तक प्रति वर्ष 10 रुपये मिलते हैं जिसमें प्रथम भुगतान आज मिलता है। नकदी प्रवाह B हेतु आपको हमेशा के लिए प्रति वर्ष x रुपये मिलते हैं जिसमें प्रथम भुगतान आज मिलता है। नकदी प्रवाह B का वर्तमान मान नकदी प्रवाह A के वर्तमान मान के बराबर हो, इस हेतु x का मान क्या है ?

(b) समय t के साथ जनसंख्या वृद्धि को वर्णित करने वाले लॉजिस्टिक फलन :

$$f(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-rt}}$$

- (i) प्रारम्भिक जनसंख्या क्या है ? समय $t = 0$ पर $P(t)$ किस दर से बढ़ रहा है ?
- (ii) समय के साथ जनसंख्या पर क्या प्रभाव पड़ता है ?
- (iii) हेतु समय का वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जहाँ जनसंख्या गिरना प्रारम्भ हो जाती है।
- (c) (i) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 8$ के ग्राफ पर सभी बिन्दुओं (x, y) को खोजें जहाँ ग्राफ पर स्पर्श रेखा (x, y) में ढलान $= -1$ है।
- (ii) फलन $f(x)$ हर जगह निरंतर और अवकलनीय है। साबित कीजिए कि यदि $f(x)$ में दो वास्तविक मूल (root) हैं, तो इसके व्युत्पन्न $f'(x)$ में कम से कम एक मूल (Root) है।

- (d) प्रतिलोम फलन (Inverse function) $g(x)$ को व उसके परास को ज्ञात कीजिए :

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$$

आरेख की सहायता से दर्शाइए कि $f(x)$ व $g(x)$ रेखा $y = x$ के प्रति सममित (Symmetric) हैं।

5. Do any *three* of the following : $3 \times 5 = 15$

- (a) Consider the function f defined by

$$f(x) = 4 - x + \log(x - 1), \quad x > 1.$$

Determine where f is increasing and where f is decreasing.

Does it have any global extreme points ?

- (b) Given the function :

$$f(x) = \frac{3x^2 - 8}{x^2 - 4}$$

- Find the asymptotes.
- Find the possible local extremes
- Find the intervals of concavity and convexity
- Draw the graph.

- (c) A tour service offers the following rates :

Rs. 1000 per person if 50 people (the minimum number to book the tour) go on the tour for every additional person, up to a maximum of 80 people total, everyone's charge is reduced by Rs. 10.

It costs 3000 (a fixed cost) plus Rs. 200 per person to conduct the tour.

How many people does it take to maximize the profit ?

- (d) Given a demand curve $p = f(x)$ is convex from below

$$\text{i.e. } \frac{d^2 p}{dx^2} > 0.$$

The total revenue $TR = px$ is defined in terms of x and

$$\text{the marginal revenue } MR = \frac{d(TR)}{dx}.$$

Show that the MR curve is also convex from below if

$$\frac{d^3 p}{dx^3} > 0 \quad \text{or if} \quad \frac{d^3 p}{dx^3} < 0 \quad \text{it is} \quad \left| \frac{d^3 p}{dx^3} \right| < \left| \frac{3d^2 p}{x dx^2} \right|.$$

निम्नलिखित में से किन्हीं तीन के उत्तर दीजिए :

- (a) $f(x) = 4 - x + \log(x - 1)$, $x > 1$ द्वारा परिभाषित फलन f पर विचार कीजिए। f कहाँ वर्द्धमान (Increasing) है व कहाँ ह्रसमान (Decreasing), ज्ञात कीजिए। क्या इसके कोई वैश्विक (Global) चरम बिन्दु (Extreme points) हैं ?

- (b) फलन दिया है :

$$f(x) = \frac{3x^2 - 8}{x^2 - 4}$$

- (i) सभी सम्भव अनन्तस्पर्शियाँ (Asymptotes) ज्ञात कीजिए।
- (ii) स्थानीय (Local) उच्चिष्ठों व स्थानीय-निम्निष्ठों को भी ज्ञात कीजिए।
- (iii) फलन कहाँ उत्तल (Convex) है तथा कहाँ अवतल (Concave) है।
- (iv) आरेख बनाइए।

- (c) एक यात्रा सेवा निम्नलिखित दरें देती है :

यदि 50 लोग (यात्रा को बुक करने हेतु न्यूनतम संख्या)

यात्रा पर जाएँ तो 1000 रुपये प्रति व्यक्ति। प्रत्येक अतिरिक्त

व्यक्ति हेतु (अधिकतम कुल 80 लोग तक) हर व्यक्ति का शुल्क 10 रुपये कम कर दिया जाएगा।

यात्रा करने में स्थिर लागत 3000 रुपये व प्रति व्यक्ति 200 रुपये अतिरिक्त लागत आती है।

कितने लोगों के यात्रा करने से लाभ अधिकतम होगा ?

- (d) दिया हुआ मांग वक्र $p = f(x)$ नीचे से उत्तल (Convex)

है अर्थात् $\frac{d^2 p}{dx^2} > 0$ ।

कुल राजस्व (Total revenue) $TR = px$, x के पदों में परिभाषित है तथा सीमान्त राजस्व (Marginal revenue)

$$MR = \frac{d(TR)}{dx} \text{ है।}$$

दर्शाइए कि MR वक्र भी नीचे से उत्तल है, यदि $\frac{d^3 p}{dx^3} > 0$

या यदि $\frac{d^3 p}{dx^3} < 0$, यह $\left| \frac{d^3 p}{dx^3} \right| < \left| \frac{3d^2 p}{x dx^2} \right|$ होगा।

6. Do any two of the following :

2×3=6

- (a) At a certain factory, the marginal cost is $3(q - 4)^2$ per unit when the level of production is q units. By how much will the total cost increase if the level of production is raised from 6 units to 10 units ?

(b) Find the area of the region enclosed by the graphs of

$$y = x^2 \text{ and } y = 2 - x.$$

(c) Given the demand and supply functions in a competitive

market :

$$Q_t^d = 1200 - 6p_t \text{ and } Q_t^s = 2p_{t-1}$$

Find the equilibrium price and quantity in the market. What

is the stability of the adjustment to a disturbance in the

market ?

किन्हीं दो के उत्तर दीजिए :

(a) किसी कारखाने में जब उत्पादन का स्तर q इकाइयाँ

है तो सीमान्त लागत $3(q - 4)^2$ प्रति इकाई होता है।

यदि उत्पादन का स्तर 6 इकाइयों से बढ़कर 10 इकाइयाँ

कर दिया जाता है तो कुल लागत कितनी बढ़

जाएगी ?

(b) $y = x^2$ व $y = 2 - x$ के आरेखों द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का

क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(c) एक प्रतिस्पर्धी (Competitive) बाजार में मांग व आपूर्ति

फलन निम्न प्रकार हैं :

$$Q_t^d = 1200 - 6p_t \text{ व } Q_t^s = 2p_{t-1}$$

इस बाजार में सन्तुलन की अवस्था (Equilibrium) में कीमत

व मात्रा ज्ञात कीजिए। बाजार में एक आघात (Disturbance)

के परिणामस्वरूप समायोजन का स्थायित्व (Stability) क्या

है ?